Olivier Bochet

24 août 2004

Examen
Maths III

Il y a cinq questions à résoudre. Ne vous inquiétez pas, vous avez assez de temps pour tout faire. N'oubliez pas que ceci est un examen de maths et non de littérature, donc soyez aussi précis et concis que possible dans vos réponses! Bonne chance à tous.:::::::

Question 1 : Vrai ou faux. Si l'affirmation est vraie, justifiez-la (pas de justification du type démonstration, pas de points!). Si elle est fausse, construisez un contre-exemple.

1) Une fonction continue est differentiable en tout point de son domaine

2) Une fonction continue définie sur une ensemble ouvert n'atteint jamais de maximum

3) Si $X \subset \mathbb{R}_+^n$ est un ensemble convexe et $f : X \to \mathbb{R}$ est strictement quasi-concave, alors la valeur qui maximise f sur l'ensemble X est unique.

4) Une fonction concave est quasi-concave

5) L'ensemble de points defini par $A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ et } 1 \leq x_2 \leq 2\right\}$ est un ensemble ouvert.

Question 2:
Soit $f(w, x, y, z) = 2wx + y^2 + z^2 - 2w - 6x - 4y - 2z + 10$.

1) Trouvez les points stationnaires de cette fonction.

2) A l'aide des conditions de second ordre, caractérisez ces points stationnaires.

Question 3:
Soit $f(w,x,y,z) = 2wx + y^2 + z^2 - 2w - 6x - 4y - 2z + 25$ et les contraintes,

$$\begin{aligned} w &= x \\ y + z &= 3 \end{aligned}$$

1) Ecrivez le lagrangien associé à ce problème et trouvez ses points stationnaires.

2) A l'aide des conditions de second-ordre, caractérisez ces points stationnaires.

Question 4:
Considérez le problème suivant:

$$\begin{aligned} \underset{x,y}{Max}\ f(x,y) &= y - x^2 \text{ sous les contraintes,} \\ g_1(x,y) &= x + 2y \leq 3 \\ g_2(x,y) &= y - x \leq 0 \\ g_3(x,y) &= x \geq 0 \\ g_4(x,y) &= y \geq 0 \end{aligned}$$

1) Ecrivez le lagrangien associé à ce problème ainsi que les conditions (de premier ordre) de Kuhn-Tucker (les conditions vues en **cours**).

2) Il y a-t-il une solution avec $x + 2y = 3$ et $y - x < 0$? Expliquez.

3) Il y a-t-il une solution avec $x + 2y = 3$ et $y - x = 0$? Expliquez.

4) Comment vos réponses aux questions 2) et 3) changent si la fonction est $f(x,y) = y - (x-1)^2$?

5) De manière plus générale; considérez la fonction,

$$f(x,y) = y - (x - \alpha)^2\,,\ 0 < \alpha < 2.$$

Utilisez les conditions de Kuhn-Tucker pour déterminer les restrictions sur le paramètre α qui génèrent une solution avec $x + 2y = 3$ et $y - x = 0$.

Question 5:
Résolvez les équations differentielles suivantes:

1) $\ddot{y} - y = 0$

2) $\ddot{y} - y = e^{2t}$

3) $2\ddot{y} + 3\dot{y} - 2y = 0$