

Olivier Bochet

9 juin 2004

## Examen Maths III

*Il y a cinq questions à résoudre. Ne vous inquiétez pas, vous avez assez de temps pour tout faire. N'oubliez pas que ceci est un examen de maths et non de littérature, donc soyez aussi précis et concis que possible dans vos réponses! Bonne chance à tous. Et surtout, de très bonnes vacances.....*

**Question 1 : Vrai ou faux. Si l'affirmation est vraie, justifiez-la (pas de justification, pas de points!). Si elle est fausse, construisez un contre-exemple.**

1) Une fonction concave est toujours quasi-concave, mais une fonction quasi-concave n'est pas nécessairement concave.

2) L'union d'une famille d'ensembles convexes est toujours convexe.

3) Si  $X \subset \mathbb{R}_+^n$  est un ensemble convexe et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement quasi-concave, alors la valeur qui maximise  $f$  sur l'ensemble  $X$  est unique.

4) La fonction  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  est une fonction continue.

5) L'ensemble de points défini par une droite dans  $\mathbb{R}_+^2$  est un ensemble ouvert.

**Question 2:**

Considérez l'équation  $f(x, y, z) = -x + 3y^2z^2 + xy - z^2x = 2$ . Cette équation définit-elle  $z$  comme fonction implicite de  $x$  et  $y$ ,

1) Autour du point  $(x, y) = (2, 2)$ ?

2) Dans un voisinage de  $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$ ? Si oui, calculez  $\frac{\partial z}{\partial x}$  et  $\frac{\partial z}{\partial y}$  en ce point. Estimez également le changement dans la valeur de  $z$  si  $x$  diminue à  $-1.1$  et  $y$  augmente à  $0.1$ .

**Question 3:**

Considérez le problème suivant:

$$\underset{x,y}{Max} f(x, y) = (x - 2)(y - 1) \text{ sous la contrainte } x + 5y = 37.$$

1) Ecrivez le lagrangien associé à ce problème et trouvez ses points stationnaires

2) A l'aide des conditions de second-ordre, vérifiez lesquels de ces points sont des maximums locaux stricts.

**Question 4:**

Considérez le problème suivant:

$$\begin{aligned} \underset{x,y}{Max} f(x, y) &= -(x - 2)^2 - (y - 8)^2 \text{ sous les contraintes,} \\ g_1(x, y) &= 2x + y \leq 6 \\ g_2(x, y) &= -x \leq 0 \\ g_3(x, y) &= -y \leq 0 \end{aligned}$$

1) Ecrivez le lagrangien associé à ce problème ainsi que les conditions (de premier ordre) de Kuhn-Tucker.

2) Supposez  $x = y = 0$ . Montrez que ce cas contredit les conditions de Kuhn-Tucker. En examinant la fonction  $f$ , pouvez-vous expliquer pourquoi?

3) Sur un graphique, représentez ce problème (c'est à dire, représentez la contrainte ainsi que les courbes de niveau de  $f$ ). Trouvez graphiquement sa solution.

**Question 5:**

Dessinez le diagramme de phase de l'équation différentielle,

$$\dot{y} = y^2 - 2y - 3$$

(pas besoin de résoudre l'équation).

1) Quels sont les équilibres stationnaires?

2) Pour chacun des équilibres, dites s'il est stable ou instable. Pouvez-vous justifier intuitivement votre réponse?