Maths III. Séance de TP 5.

Exercice 1:

Minimisez la fonction $f(x, y, z) = (y+z-3)^2$ sous les contraintes $x^2+y+z = 2$ et $x+y^2+2z = 2$. Vérifiez d'abord les contraintes de qualification. A l'aide des conditions de second ordre, caractérisez les points stationnaires de $L(x, y, \lambda)$ et déduisez-en la ou les solutions de votre problème de minimisation.

Exercice 2:

Maximisez la fonction $f(x, y) = x^2y$ sous la contrainte $2x^2 + y^2 = 3$. Vérifiez d'abord les contraintes de qualification. A l'aide des conditions de second ordre, caractérisez les points stationnaires de $L(x, y, \lambda)$ et déduisez-en la ou les solutions de votre problème de maximisation.

Exercice 3:

Considérez la fonction $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^\alpha + y^\alpha$$

où α est un paramètre tel que $0 < \alpha \leq 1$. Trouvez tous les couples $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ qui maximisent cette fonction sous la contrainte $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. Justifiez votre réponse. Comment la solution de ce problème évolue-t-elle avec α?

Exercice 4:

Maximisez la fonction $f(x, y, z) = 4z - x^2 - y^2 - z$ sous la contrainte $z - xy = 0$. Utilisez les conditions de second ordre pour caratériser le ou les points stationnaires et identifiez les solutions du programme de maximisation. Ensuite, estimez le changement de la valeur optimale de f si la contrainte change de $z - xy = 0$ à $z - xy = 0.1$.