**Exercices sur Kuhn-Tucker**

**Question 1:**
$\underset{x,y}{Max}\ 4x + 3y$ sous contraintes $2x + y \leq 10$, $x \geq 0$ et $y \geq 0$

$$\tilde{L} = 4x + 3y - \lambda(2x + y - 10)$$

Les conditions de Kuhn-Tucker sont:

$$\begin{aligned} 4 - 2\lambda &\leq 0,\ x \geq 0,\ x(4 - 2\lambda) = 0\ (1) \\ 3 - \lambda &\leq 0,\ y \geq 0,\ y(3 - \lambda) = 0\ (2) \\ 2x + y &\leq 10,\ \lambda \geq 0,\ \lambda(2x + y - 10) = 0\ (3) \end{aligned}$$

Tout d'abord, par (1), on a soit $x = 0$ soit $\lambda = 2$.

a) Supposons que $\lambda = 2$. Par (2), on obtient que $2 \geq 3$, impossible. Donc $x = 0$.

b) On sait que $x = 0$.

Supposons que $y = 0$. Alors, par (3) on obtient que $\lambda = 0$. Mais par (2), on a de nouveau que $0 \geq 3$, une contradiction. Donc $y > 0$.

c) si $x = 0$ et $y > 0$, par (2), on obtient que $\lambda = 3$. Donc, par (3), comme $\lambda > 0$ alors $y = 10$. C'est la solution de notre problème.

**Question 2**:
$\underset{x,y}{Max}\ 2y^2 - x$ sous contraintes $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$ et $y \geq 0$

$$\tilde{L} = 2y^2 - x - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Les conditions de Kuhn-Tucker sont:

$$\begin{aligned} -1 - 2\lambda x &\leq 0,\ x \geq 0,\ x(-1 - 2\lambda x) = 0\ (1) \\ 4y - 2\lambda y &\leq 0,\ y \geq 0,\ y(4y - 2\lambda y) = 0\ (2) \\ x^2 + y^2 &\leq 1,\ \lambda \geq 0,\ \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0\ (3) \end{aligned}$$

a) $x > 0$. Alors, $x = -\frac{1}{2\lambda}$, impossible. Donc $x = 0$.
b) $y = 0$. On a $\lambda = 0$. Possible mais notez que $2y^2 - x = 0$ quand $y = x = 0$.
c) Si $y > 0$. Alors $\lambda = 2$. Donc $y = 1$. Ceci est la solution de notre probleme:

$$x = 0,\ y = 1.$$