Analyse de la décision. Réponses pour le TP2

Tout d'abord, quelques remarques sur deux erreurs survenues dans la correction du TP1 ainsi que dans celle du TP2 (voir ci-dessous)

Analyse de la décision. Corrigendum pour le TP1 et le TP2

Exercice 5 du TP1: Il y avait une erreur dans la correspondence de meilleure réponse

La demande est $Q = P^{-2}$. On a deux firmes. La seule différence avec le problème vu en classe est que chaque firme doit maintenant annoncer un prix qui est un nombre entier non-nul. On fait implicitement l'hypothèse que c est un nombre entier (les resultats pourraient être différent sinon). Dérivons la correspondence de meilleure réponse de la firme 1.

$$B_1(p_2) = \begin{cases} (p_2, +\infty) \cap \mathbb{N} \text{ si } p_2 < c \\ [p_2, +\infty) \cap \mathbb{N} \text{ si } p_2 = c \\ \{c+1\} \text{ si } p_2 = c+1 \\ \{p_2 - 1\} \text{ si } p_2 \in c+1, 2c] \cap \mathbb{N} \\ \{2c\} \text{ si } p_2 > 2c \end{cases}$$

Si on graphe les correspondances de meilleures reponses, on voit qu'il y a maintenant 2 intersections: une à (c, c) comme auparavant, mais également une à $(c+1, c+1)$. On a donc deux équilibres de Nash qui correspondent aux deux intersections des correspondences de meilleures reponses.

Exercice 5 du TP2*:* Il y avait une erreur dans la manière dont était écrit les équilibres de Nash

Le jeu est une variante de l'analyse faite en classe. Ici, l'espace de stratégies des joueurs est identique,

$$S_i = [0, +\infty)$$

Par contre les payoffs sont différents. Les joueurs ne valuent plus le temps passé à attendre que l'autre abandonne mais l'objet perd de sa valeur au fur et à mesure que le temps passe.

$$u_i(t_i, t_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } t_i < t_j \\ \frac{v_i - t}{2} \text{ si } t_i = t_j = t \\ v_i - t_j \text{ si } t_i > t_j \end{cases}$$

La correspondence de meilleure réponse du joueur i est

$$\beta_i(t_j) = \begin{cases} (t_j, +\infty) \text{ si } t_j < v_i \\ [0, +\infty) \text{ si } t_j = v_i \\ [0, t_j) \text{ si } t_j > v_i \end{cases}$$

En graphant les correspondences de meilleures réponses, on voit qu'il y a une infinité d'équilibre de Nash.

On divise l'ensemble des équilibres de Nash en trois ensembles possibles. Ces ensembles sont conditionnels aux valeurs prises par v_1 et v_2.

1) $v_1 = v_2$. L'ensemble des equilibres de Nash est,

$\{(t_1, t_2) \geq 0 : (t_1 \in [v_2, +\infty) \text{ et } t_2 \in [0, v_1]) \text{ ou } (t_1 \in [0, v_2] \text{ et } t_2 \in [v_1, +\infty))\}$.

2) Si $v_1 > v_2$ alors $\{(t_1, t_2) : (t_1 \geq v_2 \text{ et } t_2 = [0, v_1]) \text{ ou } (t_1 \leq v_2 \text{ et } t_1 > t_2,\ t_2 \geq v_1)\}$ est un ensemble regroupant une infinité d'équilibres.

3) Si $v_2 > v_1$, alors $\{(t_1, t_2) : (t_1 \leq v_2,\ t_1 < t_2 \text{ et } t_2 \geq v_1) \text{ ou } (t_1 \geq v_2 \text{ et } t_2 \leq v_1)\}$ est également un ensemble regroupant une infinité d'équilibres de Nash.

OK, maintenant la correction du TP2 (ne pas oublier que la solution du probleme 5 doit etre remplacee par le corrigendum ci-dessus).

Exercice 1:

Afin de trouver un équilibre parfait en sous-jeux, il est utile de dessiner l'arbre de jeu.

Tout d'abord, un peu d'analyse de ce jeu. Supposons que Bob doit jouer. Quelle peut être sa meilleure réponse? Tirer sur Al ou sur Curly? S'il tire sur Al, quelquesoit l'issue, Curly jouera en troisième et aura la possibilité de tirer sur Bob et de le tuer. Par contre, si Bob tire sur Curly, il a 40% de chance que le jeu s'arrête et d'obtenir un payoff positif. D'autre part, pour Al, essayer d'éliminer le plus rapidement le gangster le plus habile parait être une strategie raisonnable! Evidemment, ceci est très informel et vous devez calculez les payoffs espérés afin de vous convaincre de cette affirmation.

L'équilibre parfait en sous-jeux que je propose est le suivant:

1)Al tire sur Curly

2) Bob tire sur Curly si Curly est toujours vivant. Sinon il tire sur Al.

3) Curly tire sur Bob s'il est toujours vivant. Sinon il tire sur Al.

Etant donne la strategie des deux autres joueurs, le payoff esperé de Curly est:

$0.8(0.6(0.7(\frac{1}{2}) + 0.3(\frac{1}{3}))$

Si il devie et decide de tirer sur Al si il est vivant, et sur bob sinon, son payoff esperé est le même. Donc, Curly n'a aucune incitation à devier de sa stratégie, étant donné les stratégies utilisées par les deux autres.

Etant donné la stratégie des deux autres joueurs, le payoff esperé de Bob est:

$0.2(0.4 + 0.6(\frac{1}{2})) + 0.8(0.4(\frac{1}{2}) + 0.6(0.3(\frac{1}{3})))$

Si il dévie et tire sur Al, alors il obtient:

$0.2(0.4 + 0.6(\frac{1}{2})) + 0.8(0.4(0.3(\frac{1}{2})) + 0.6(0.3(\frac{1}{2}))) = 0.2(0.4 + 0.6(\frac{1}{2})) + 0.8(0.3(\frac{1}{2}))$

Or, $0.2(0.4 + 0.6(\frac{1}{2})) + 0.8(0.3(\frac{1}{2})) < 0.2(0.4 + 0.6(\frac{1}{2})) + 0.8(0.4(\frac{1}{2}) + 0.6(0.3(\frac{1}{3})))$ car,

$$0.8(0.3(\frac{1}{2})) < 0.8(0.4(\frac{1}{2}) + 0.6(0.3(\frac{1}{3})))$$

Donc Bob ne veut pas dévier de sa stratégie.

Maintenant, étant donne la stratégie des deux autres joueurs, le payoff esperé de Al est:

$0.2(0.6(\frac{1}{2})) + 0.8(0.4(\frac{1}{2}) + 0.6(0.7(\frac{1}{2}) + 0.3(\frac{1}{3}))$

Si il dévie et tire sur Bob, alors il obtient:

$0.2(0.3(\frac{1}{2})) + 0.8(0.4(\frac{1}{2}) + 0.6(0.7(\frac{1}{2}) + 0.3(\frac{1}{3}))$

Donc, Al ne veut pas dévier de sa stratégie, étant donné la stratégie des deux autres.

Pour conclure, notez qu'il y a d'autres équilibres parfait en sous-jeux. Il y en a un autre en stratégie pure. Il diffère du précédent seulement dans la stratégie de Curly: Curly tire sur Al si vivant et sur Bob sinon. Il y a également une infinité d'équilibre parfait en sous-jeux en stratégies mixtes: Al et Bob jouent les même strategies mais Curly tire de manière aléatoire sur Bob et Al avec n'importe quelle probabilité.

Exercice 2*:*

Appelons les firmes, firme 1 et firme 2. La firme 1 maximise (par rapport à x)

$$\pi_1 = \frac{x}{x+y} - \frac{x}{4}$$

et la firme 2 maximise (par rapport à y)

$$\pi_2 = \frac{y}{x+y} - \frac{y}{4}$$

La fonction de meilleure réponse de la firme 1 (comme fonction de y) s'obtient a partir de la condition de premier ordre:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x} = (x+y)^{-1} - x(x+y)^{-2} - \frac{1}{4} = 0$$

On obtient que,

$$x^\star(y) = 2\sqrt{y} - y$$

De manière similaire, on obtient pour la firme 2,

$$y^\star(x) = 2\sqrt{x} - x$$

Donc,

$$x^\star = 2\sqrt{(2\sqrt{x} - x)} - 2\sqrt{x} + x$$

Avec un peu d'algèbre, on obtient

$$x = \sqrt{x}$$

Donc, $x = y = 1$ est la seule solution possible (vous pouvez confirmer cette réponse en graphant les fonctions de meilleure reponse. Vous constaterez qu'elles se croisent au point $(1,1)$). Donc, il y a un unique equilibre de Nash qui est $(1,1)$.

Exercice 3*:*

Au-dela de la troisieme période, le jeu est identique au modèle de marchandage de Rubinstein à la seule exception que le joueur 2 commence à proposer (il est le proposeur en quatrième période). Si l'on considère seulement cette partie (repetée infiniment) du jeu, alors on sait que les payoffs obtenus seraient (regardez vos notes de cours)

$$\frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2} \text{ et } \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}$$

Maintenant, utilisons ces payoffs pour remonter jusqu'a la première période du jeu. En troisieme période, $1 \leq x < 2$. Le joueur 1 fait une offre.

Le joueur 2 doit être indifférent entre accepter cette offre et la rejeter pour obtenir $\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}$ en quatrième période. Donc, le joueur 1 propose

$$x-\delta_2(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}) \text{ et } \delta_2(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2})$$

En deuxième période, $x=2$. Le joueur 2 propose

$$\delta_1(x-\delta_2(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}) \text{ et } 2-\delta_1(x-\delta_2(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}))$$

Finalement, le joueur 1 propose en première période, le partage

$$2-\delta_2(2-\delta_1(x-\delta_2(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}))) \text{ et } \delta_2(2-\delta_1(x-\delta_2(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2})))$$

Les stratégies suivantes forment l'unique équilibre parfait en sous-jeux:

Joueur 1:

1) Propose $2-\delta_2(2-\delta_1(x-\delta_2(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2})))$ et $\delta_2(2-\delta_1(x-\delta_2(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2})))$ en première période.

2) En deuxième période, accepte toute offre $y \geq \delta_1(x-\delta_2(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2})$

3) En troisième période, propose $x-\delta_2(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2})$ et $\delta_2(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2})$.

4) A partir de la quatrième période, le joueur 1 offre $(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}\ ;\delta_2(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}))$ et accepte toute offre $y \geq \frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}$ à chaque période où il doit faire une offre ou répondre à une proposition du joueur 2. (Donc, à partir de la quatrième période, les stratégies sont stationnaires, i.e. indépendentes du temps).

Joueur 2:

1) En première période, le joueur 2 accepte toute offre $y \geq \delta_2(2-\delta_1(x-\delta_2(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2})))$

2) En deuxième période, le joueur 2 offre $\delta_1(x-\delta_2(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2})$ et $2-\delta_1(x-\delta_2(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}))$

3) En troisième période, le joueur 2 accepte toute offre $y \geq \delta_2(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2})$

4) A partir de la quatrième période, le joueur 2 offre $(\frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}\ ;\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2})$ et accepte toute offre $y \geq \delta_2(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2})$ à chaque periode où il doit faire une offre ou repondre à une proposition du joueur 1. (Donc, à partir de la quatrième période, les strategies sont stationnaires, i.e. indépendentes du temps).

Exercice 4:

Répeter le jeu de l'ultimatum n'a aucune incidence sur l'équilibre parfait en sous-jeux: Le joueur propose $(1,0)$ et l'offre est acceptée immediatement par le joueur 2.

Exercice 5:

Le jeu est une variante de l'analyse faite en classe. Ici, l'espace de stratégies des joueurs est identique,

$$S_i = [0, +\infty)$$

Par contre les payoffs sont différents. Les joueurs ne valuent plus le temps passé à attendre que l'autre abandonne mais l'objet perd de sa valeur au fur et à mesure que le temps passe.

$$u_i(t_i, t_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } t_i < t_j \\ \frac{v_i - t}{2} \text{ si } t_i = t_j = t \\ v_i - t_j \text{ si } t_i > t_j \end{cases}$$

La correspondence de meilleure réponse du joueur i est

$$\beta_i(t_j) = \begin{cases} (t_j, +\infty) \text{ si } t_j < v_i \\ [0, +\infty) \text{ si } t_j = v_i \\ [0, t_j) \text{ si } t_j > v_i \end{cases}$$

En graphant les correspondences de meilleures réponses, on voit qu'il y a une infinité d'équilibre de Nash.

On divise l'ensemble des équilibres de Nash en trois ensembles possibles. Ces ensembles sont conditionnels aux valeurs prises par v_1 et v_2.

1) $v_1 = v_2$. L'ensemble des equilibres de Nash est,

$\{(t_1, t_2) \geq 0 : (t_1 \in [v_2, +\infty) \text{ et } t_2 \in [0, v_1]) \text{ ou } (t_1 \in [0, v_2] \text{ et } t_2 \in [v_1, +\infty))\}$.

2) Si $v_1 > v_2$ alors $\{(t_1, t_2) : (t_1 \geq v_2 \text{ et } t_2 = [0, v_1]) \text{ ou } (t_1 \leq v_2 \text{ et } t_1 > t_2,\ t_2 \geq v_1)\}$ est un ensemble regroupant une infinité d'équilibres.

3) Si $v_2 > v_1$, alors $\{(t_1, t_2) : (t_1 \leq v_2,\ t_1 < t_2 \text{ et } t_2 \geq v_1) \text{ ou } (t_1 \geq v_2 \text{ et } t_2 \leq v_1)\}$ est également un ensemble regroupant une infinité d'équilibres de Nash.

Exercice 6:

(Je pense que cet exercice est difficile. Pas la peine de passer du temps dessus).

On doit tout d'abord réécrire les dotations initiales I_1 et I_2.

Soit a_1 le cadeau donné par l'agent 1 et a_2 le cadeau donné par l'agent 2. Notez que l'espace de strategies de chaque joueur i est $A_i = [0, I_i]$.

On a que

$$\begin{aligned} x_1 &= I_1 - a_1 + a_2 \text{ et} \\ x_2 &= I_2 + a_1 - a_2 \end{aligned}$$

On peut donc réécrire les fonctions d'utilités

$$\begin{aligned} u_1 &= (I_1 - a_1 + a_2)^{\frac{2}{3}}(I_2 - a_2 + a_1)^{\frac{1}{3}} \text{ et} \\ u_2 &= (I_1 - a_1 + a_2)^{\frac{1}{3}}(I_2 - a_2 + a_1)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

L'agent 1 maximise sa fonction d'utilité par rapport au cadeau qu'il offre à l'agent 2, c'est à dire par rapport à a_1.

La CPO nous donne:

$$-\frac{2}{3}(I_1 - a_1 + a_2)^{-\frac{1}{3}}(I_2 - a_2 + a_1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}(I_1 - a_1 + a_2)^{\frac{2}{3}}(I_2 - a_2 + a_1)^{-\frac{2}{3}} = 0$$

Avec un peu d'algèbre, on obtient la fonction de réaction de l'agent 1

$$a_1(a_2) = a_2 + \frac{1}{3}I_1 - \frac{2}{3}I_2$$

On refait la même chose pour l'agent 2 et on obtient

$$a_2(a_1) = a_1 + \frac{1}{3}I_2 - \frac{2}{3}I_1$$

Solutionner pour I_1 en fonction de I_2 (comme on l'a fait pour l'exercice 2 par exemple) ne donne rien. En fait dans ce jeu il n'y a pas d'équilibres de Nash intérieurs car les correspondences de meilleures reponses ne se croisent pas à l'intérieur de $\mathbb{R}^2_+$. Autrement dit, nous devons tout d'abord définir complétement les correspondences de meilleures réponses et resoudre le problème graphiquement.

La correspondence de meilleure réponse de l'agent 1 est

$$a_1 = \begin{cases} I_1 \text{ si } a_2 \geq \frac{2}{3}(I_1 + I_2) \\ a_2 + \frac{1}{3}I_1 - \frac{2}{3}I_2 \text{ si } 0 \leq a_2 + \frac{1}{3}I_1 - \frac{2}{3}I_2 \leq I_1 \\ 0 \text{ si } a_2 \leq \frac{2}{3}I_2 - \frac{1}{3}I_1 \end{cases}$$

La correspondence de meilleure réponse pour l'agent 2 est obtenue de la meme manière.

Nous devons maintenant consider trois cas:

1) $\frac{1}{3}I_1 - \frac{2}{3}I_2 > 0$ c'est a dire $I_1 > 2I_2$

2) $I_1 < \frac{1}{2}I_2$
3) $\frac{1}{2}I_2 \leq I_1 \leq 2I_2$.

Premier cas: $I_1 > 2I_2$
Rappel$\rightarrow$ les cadeaux ne peuvent pas etre négatif.
L'intercept de la fonction de réaction de l'agent 2 est plus haut que celui de l'agent 1. L'unique équilibre de Nash est

$$(a_1, a_2) = \left(\frac{1}{3}I_1 - \frac{2}{3}I_2, 0\right)$$

Deuxième cas: $I_1 < \frac{1}{2}I_2$
L'unique équilibre de Nash est

$$(a_1, a_2) = \left(0, \frac{1}{3}I_2 - \frac{2}{3}I_1\right)$$

Troisième cas: $\frac{1}{2}I_2 \leq I_1 \leq 2I_2$
L'unique équilibre de Nash est

$$(a_1, a_2) = (0, 0)$$