Analyse de la decision. Reponses pour le TP1

Exercice 1:

Exercice 2:

Je tiens à préciser que personne ne s'est donné la peine de chercher les équilibres de Nash en stratégies mixtes. Toutefois, si la question ne précise pas explicitement de trouver les equilibres de Nash en stratégies pures, vous devez alors trouver **tous** les équilibres de Nash du jeu.

Tout d'abord, il y a trois équilibres de Nash en stratégies pures. Ceux-ci sont

$$(A, L), (C, M) \text{ et } (D, M)$$

Il y a egalement une infinité d'équilibres en stratégies mixtes.

Est-il possible d'avoir un équilibre dans lequel le joueur 2 randomise sur L, M et R avec probabilités strictement positives pour chaque actions? Soit q_1 la proba de L, q_2 la proba de M et $(1 - q_1 - q_2)$ la proba de R.

Si le joueur 1 joue A, son payoff est de

$$4q_1 + 1 - q_1 - q_2$$

Si le joueur 1 joue B, son payoff est de

$$q_2 + 10(1 - q_1 - q_2)$$

Si le joueur 1 joue C, son payoff est de

$$3q_2 + 1 - q_1 - q_2$$

Si le joueur 1 joue D, son payoff est de

$$-q_1 + 3q_2 + 5(1 - q_1 - q_2)$$

Si un équilibre en stratégies mixtes dans lequel 2 randomise sur L,M et R existe, le joueur 1 doit etre indifférent entre jouer une stratégie mixte et dévier pour jouer une strategie pure. Ceci implique que les 4 payoffs au-dessus doivent tous etre égaux. Cette condition ne peut pas être satisfaite. De la même manière, il n'existe pas d'équilibre en stratégies mixtes dans lesquels le joueur 2 randomise sur seulement 2 actions à la fois. Donc si il existe des équilibres en stratégies mixtes, 2 doit jouer des distributions de probabilités dégénerées sur une action pure. Maintenant, on peut vérifier également qu'il n'y a pas d'équilibre dans lequel 1 randomise sur toutes les actions à la fois.

Existe-t-il un equilibre dans lequel A, C et D sont jouées avec proba positive? Si le joueur 2 joue L, son payoff est de

$$3p_1$$

Si le joueur 2 joue M, son payoff est de

$$4p_3 + 1 - p_1 - p_3$$

Si le joueur 2 joue R, son payoff est de

$$p_1 + p_3$$

Avec l'equation 1 et 3, on obtient que $p_1 = \frac{1}{2}p_3$. Avec 1 et 2, on obtient que

$$\begin{aligned} 3p_1 &= 4p_3 + 1 - p_1 - p_3, \text{ et donc} \\ 4p_1 &= 1 + 3p_3, \text{ et ainsi} \\ 2p_3 &= 3p_3 + 1 \text{ ce qui donne} \\ p_3 &= -\frac{1}{3} \text{ une contradiction avec } p_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Le même raisonnement montre qu'il n'y a pas d'équilibre dans lequel 1 randomise sur trois actions a la fois sauf sur A,B et C avec proba $\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}$. Mais dans ce cas, il n'existe pas d'equilibre où le joueur 2 joue une strategie pure avec proba 1 (le joueur 1 voudrait dévier vers une strategie pure dans ce cas-ci). Et si le joueur 1 randomise seulement sur 2 actions? La seule possibilité est quand le joueur 1 randomise sur C et D. La meilleure réponse du joueur 2, quelquesoit les probabilités assignées à C et D est M. Il y a alors une infinité d'equilibres de Nash en stratégies mixtes

$$((0, 0, p, 1 - p), (0, 1, 0))$$

est un équilibre de Nash $\forall p \in [0, 1]$.

Exercice 3:

La fonction de payoff de l'étudiant $i \in N$ est $\sqrt{p_i} - x$. Ici, p_i est le prix du plat payé par l'etudiant et x est sa contribution a l'addition. Une addition est

$\sum_i p_i$. Donc, $x = \frac{\sum_i p_i}{n}$. La contribution marginale à l'addition de l'étudiant i est donc p_i. Soit $y = \sum_{j \neq i} p_j$. Le montant payé par i peut etre réecrit comme,

$$x = \frac{y}{n} + \frac{p_i}{n}$$

Le programme de chaque etudiant i est

$$\underset{p_i}{Max}\ \sqrt{p_i} - x$$

La CPO nous donne, $\frac{1}{2}p_i^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{n} = 0$. On obtient donc,

$$p_i = \frac{n^2}{4}$$

Si $n = 1$. alors $p = \frac{1}{4}$. Par contre, $\underset{n \to +\infty}{lim}\ p_i = +\infty$.

Exercice 4:
$P(Q) = Q^{-1/\epsilon}$ ou $\epsilon > 0$. $c(q_i) = cq_i$.

Chaque firme $i = 1, 2$ veut maximiser ses profits par rapports aux quantités produites, étant donnée les conjectures que chacunes a sur les quantités qui vont etre produites par la firme concurrente.

$$\underset{q_i}{Max}\ (q_i + q_j)^{-1/\epsilon} q_i - cq_i$$

La condition de premier ordre nous donne,

$$(q_i + q_j)^{-1/\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} q_i (q_i + q_j)^{\frac{-1-\epsilon}{\epsilon}} - c = 0$$

Les firmes sont identiques car elles ont la même fonction de coûts. Le jeu est donc symétrique et chaque firme va produire les mêmes quantités q^* à l'équilibre. On peut donc remplacer q_i et q_j par q^* dans la CPO. (J'attire votre attention sur le fait que ceci est possible seulement dans la CPO: je ne peux pas remplacer q_j par q_i dans ma maximisation du profit).

$$\begin{aligned}
(2q^*)^{-1/\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} q^* (2q^*)^{\frac{-1-\epsilon}{\epsilon}} &= c, \text{ d'où} \\
(2q^*)^{-1/\epsilon} - \frac{1}{2\epsilon} (2q^*)^{-1/\epsilon} &= c, \text{ et donc,} \\
(2q^*)^{-1/\epsilon} (1 - \frac{1}{2\epsilon}) &= c. \text{ Encore un peu d'algèbre,} \\
c(2q^*)^{1/\epsilon} &= \frac{2\epsilon - 1}{2\epsilon}
\end{aligned}$$

On resoud pour q^* et on obtient,

$$q^* = \frac{1}{2} (\frac{2\epsilon - 1}{2c\epsilon})^{\epsilon}$$

Il y a un seul équilibre de Nash de ce jeu qui est $(q_1^*, q_2^*) = (\frac{1}{2}(\frac{2\epsilon-1}{2c\epsilon})^\epsilon, \frac{1}{2}(\frac{2\epsilon-1}{2c\epsilon})^\epsilon)$.

Exercice 5:

La demande est $Q = P^{-2}$. On a deux firmes. La seule différence avec le problème vu en classe est que chaque firme doit maintenant annoncer un prix qui est un nombre entier non-nul. On fait implicitement l'hypothèse que c est un nombre entier (les resultats pourraient être différent sinon). Dérivons la correspondence de meilleure réponse de la firme 1.

$$B_1(p_2) = \begin{cases} (p_2, +\infty) \cap \mathbb{N} \text{ si } p_2 < c \\ [p_2, +\infty) \cap \mathbb{N} \text{ si } p_2 = c \\ \{p_2 - 1\} \text{ si } p_2 \in (c, 2c) \cap \mathbb{N} \\ \{2c\} \text{ si } p_2 > 2c \end{cases}$$

Si on graphe les correspondances de meilleures reponses, on voit qu'il y a maintenant 2 intersections: une à (c, c) comme auparavant, mais également une à $(c+1, c+1)$. On a donc deux équilibres de Nash qui correspondent aux deux intersections des correspondences de meilleures reponses.

Exercice 6:

Trivial. Le nombre de firmes n'affecte pas les équilibres de Nash dans ce jeu. Supposez que l'équilibre est (c, c, c) et montrez qu'il ne peut pas y avoir de déviations profitables. De la même manière, vérifiez qu'il n'est pas possible d'avoir un équilibre où le prix chargé par les firmes est supérieur au coût marginal. Notez toutefois que, comme dans la question précedente, si les firmes étaient contraintes à annoncer des entiers, alors les conclusions du problème seraient modifiées.